

Exercice 4

5,25 points

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .

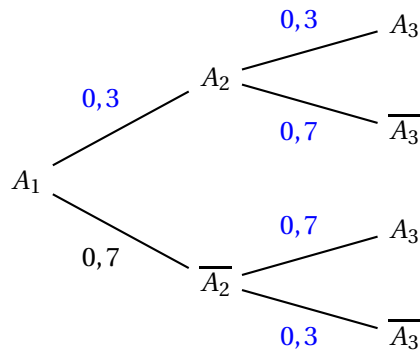
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. $\{A_2, \overline{A_2}\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_2} \cap A_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$

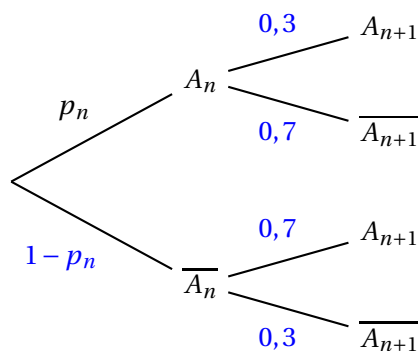
$$= 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 = 0,58$$

3. $P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \approx 0,16$

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. a. $\{A_n, \overline{A_n}\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$$

$$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

$$= p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 = 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n = -0,4p_n + 0,7$$

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,5$.
Donc $p_n = u_n + 0,5$.

b. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,5 = -0,4p_n + 0,7 - 0,5 = -0,4(u_n + 0,5) + 0,2 = -0,4u_n - 0,2 + 0,2$
 $= -0,4u_n$

$$u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = -0,4$ et de premier terme $u_1 = 0,5$.

c. On en déduit que, pour tout n , on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}$.

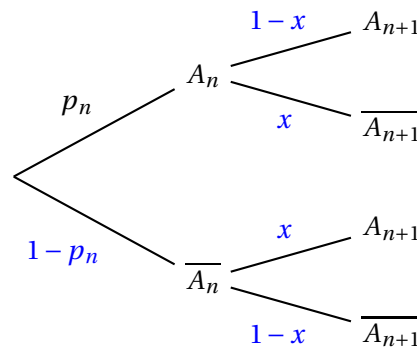
Et donc $p_n = u_n + 0,5 = 0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5$.

d. On a : $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,5$.

Partie C :

Soit $x \in]0 ; 1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

On représente cette situation par un arbre de probabilités.



1. $\{A_n, \overline{A_n}\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times (1-x) + (1-p_n) \times x = p_n - xp_n + x - xp_n = (1-2x)p_n + x \end{aligned}$$

2. On va démontrer par récurrence que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

• Initialisation

$$\text{Pour } n = 1, \text{ on a } \frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

• Hérédité

On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x = (1-2x) \left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2} \right) + x \\ &= (1-2x) \times \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x \\ &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

• Conclusion

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence sur n que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

3. $0 < x < 1$ donc $-2 < -2x < 0$ et donc $-1 < 1-2x < 1$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-2x)^{n-1} = 0$ donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.